

線形系による 擬等角写像の離散化 (R. Michael Porter氏との共同研究)

島内 宏和

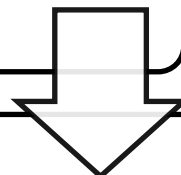
情報科学研究科 博士後期課程3年
平成24年度 博士研究教育院生

2014年11月14日

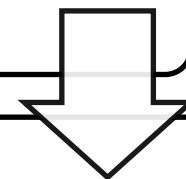
第2回 全領域合同研究交流会

目次

研究の背景と方向性



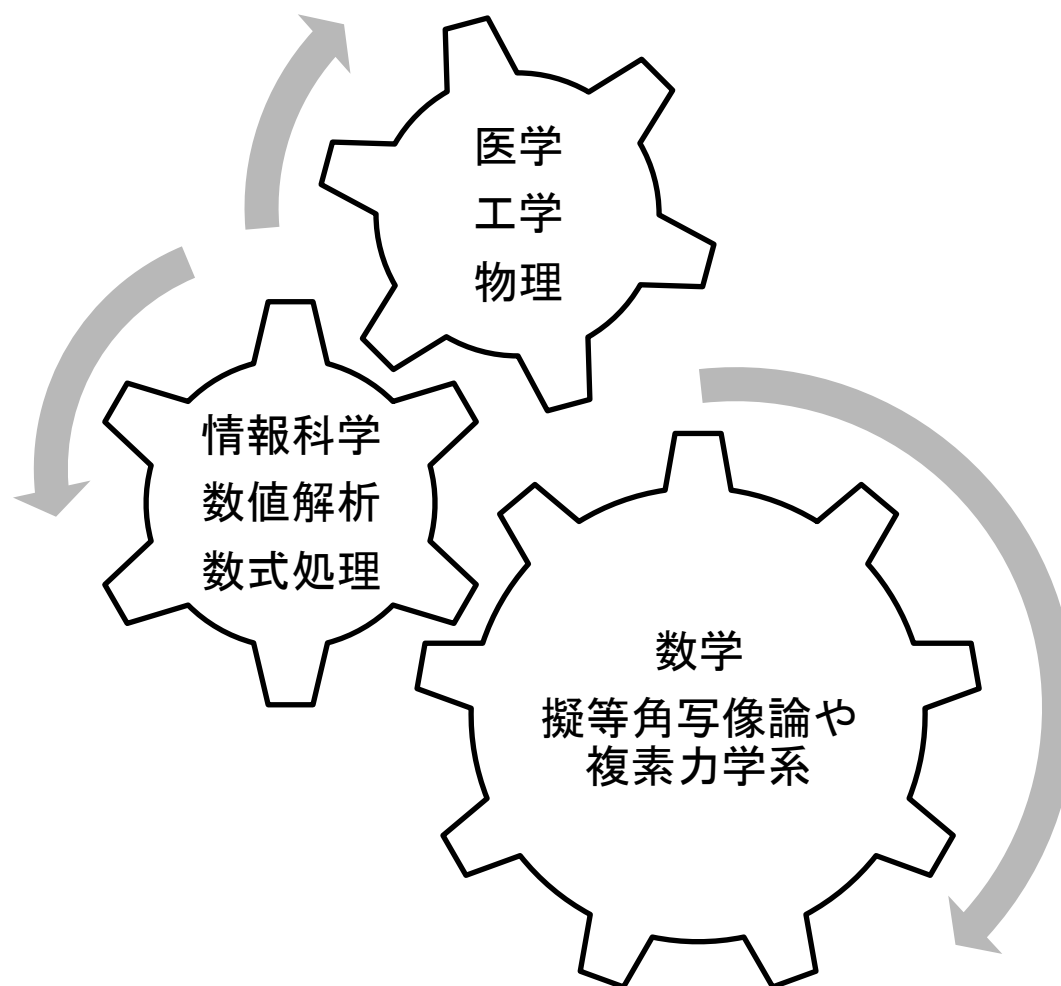
数値擬等角写像



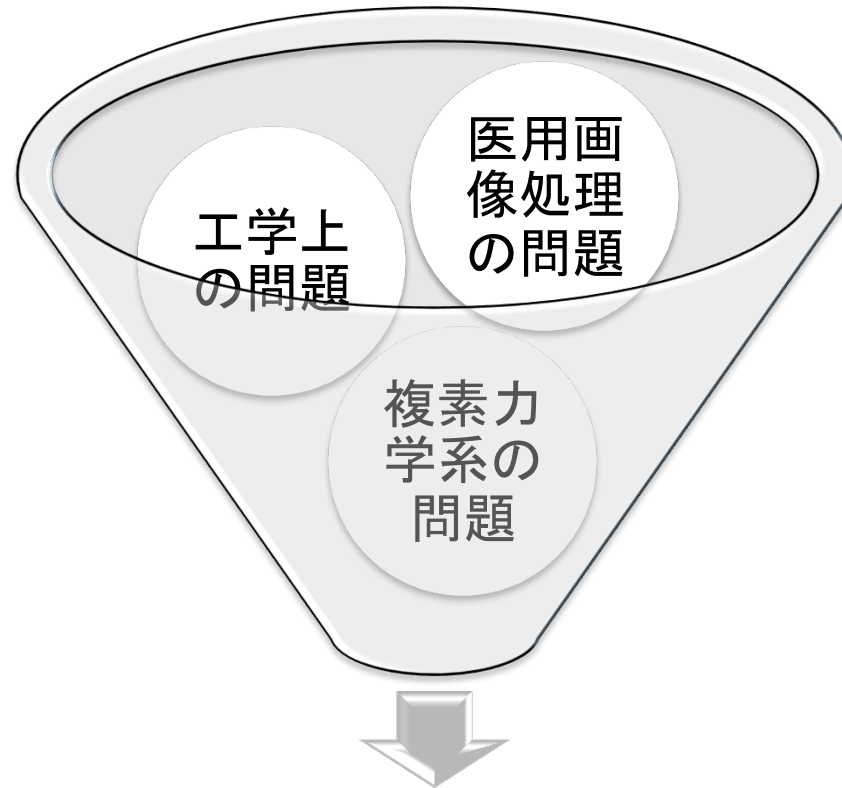
主結果と課題

研究の背景と方向性

研究の方向性



根幹にあるもの



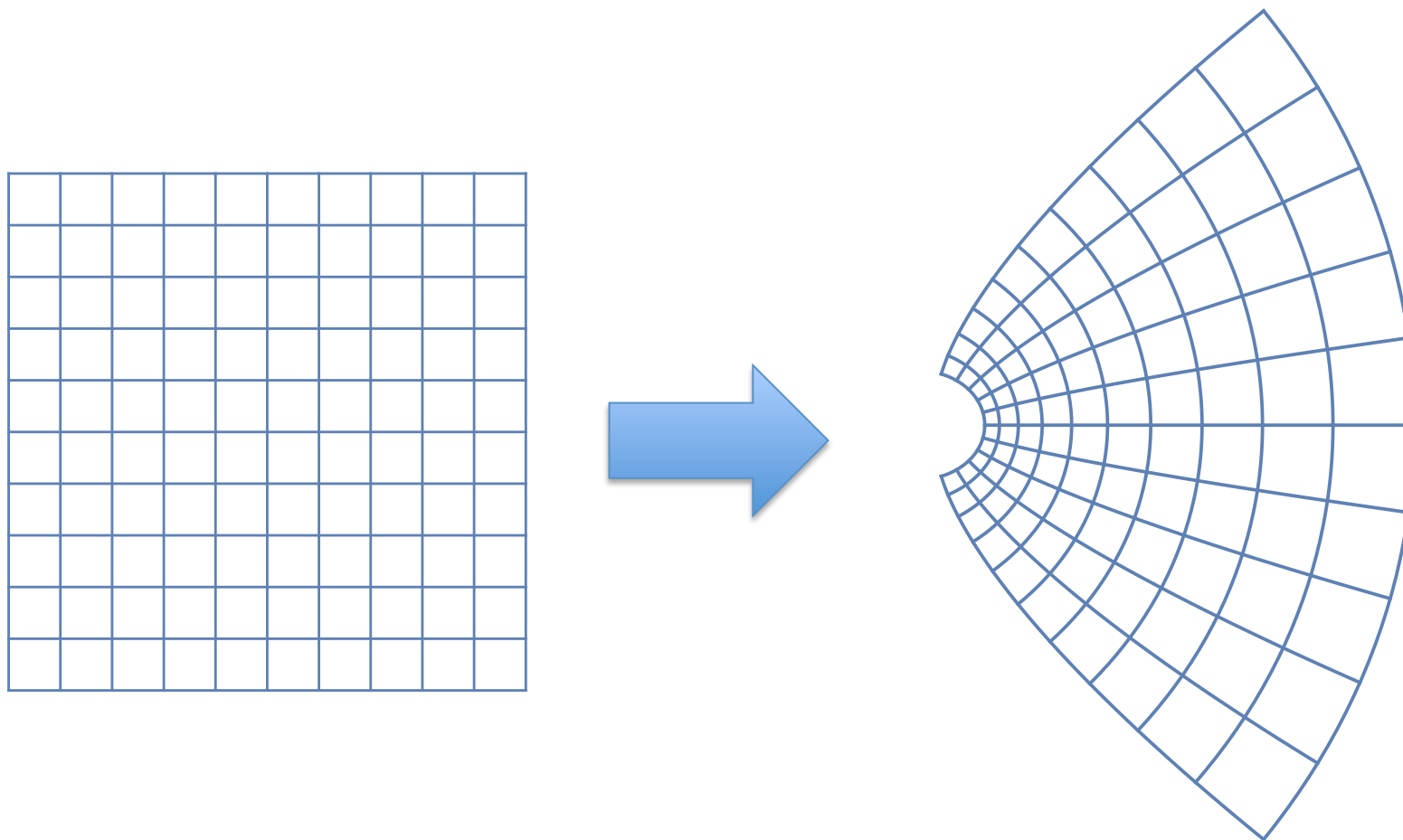
擬等角写像の数値計算

擬等角写像

- Ahlforsらにより20世紀後半に発展・整備される
- 理論的には応用範囲は多岐に渡る
- 標準的な離散化手法がない

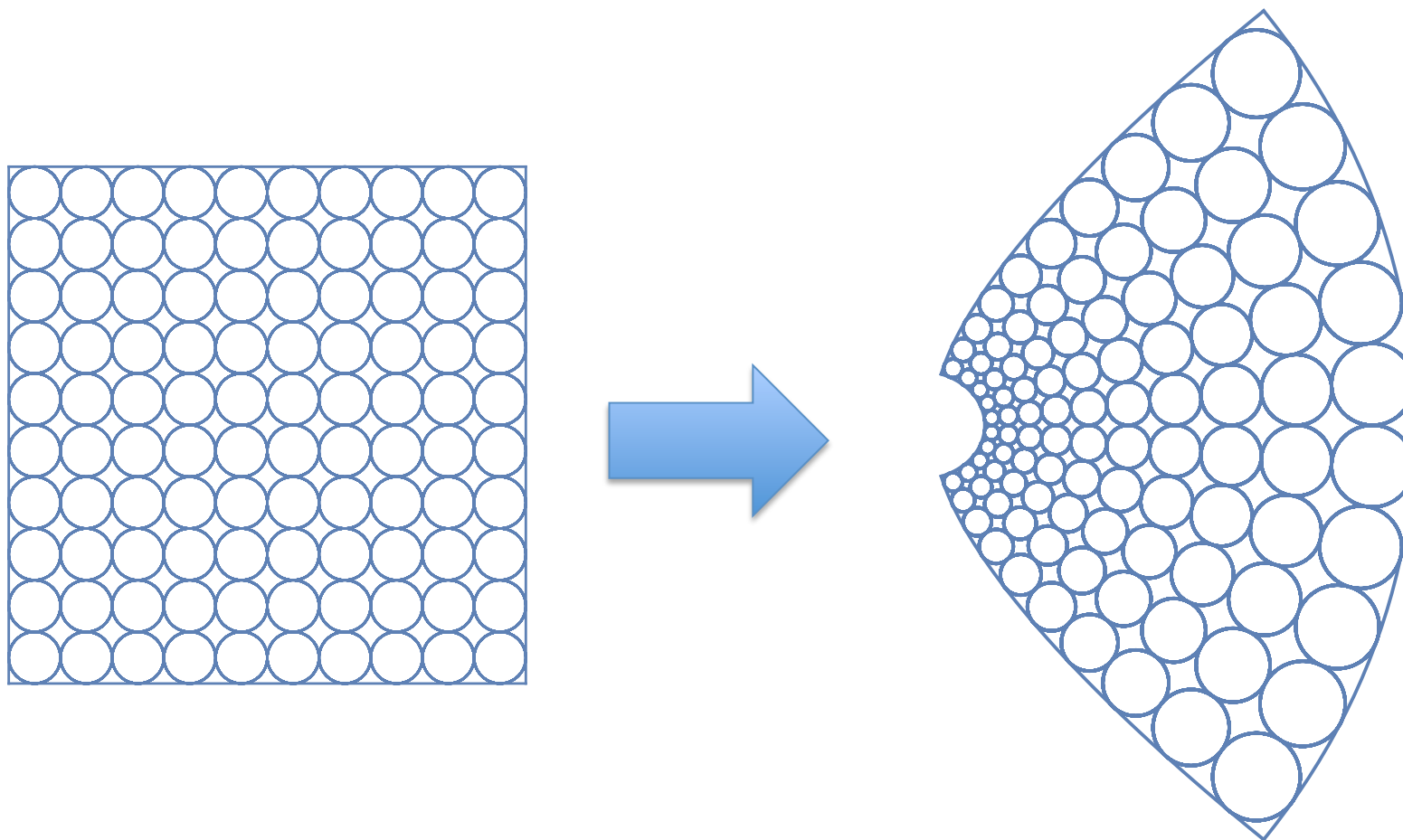
数值擬等角写像

等角写像



- ▶ 等角写像は角度を保ちつつ領域を連続変形
- ▶ 穴の空いていない領域間の等角写像が存在(リーマンの写像定理)

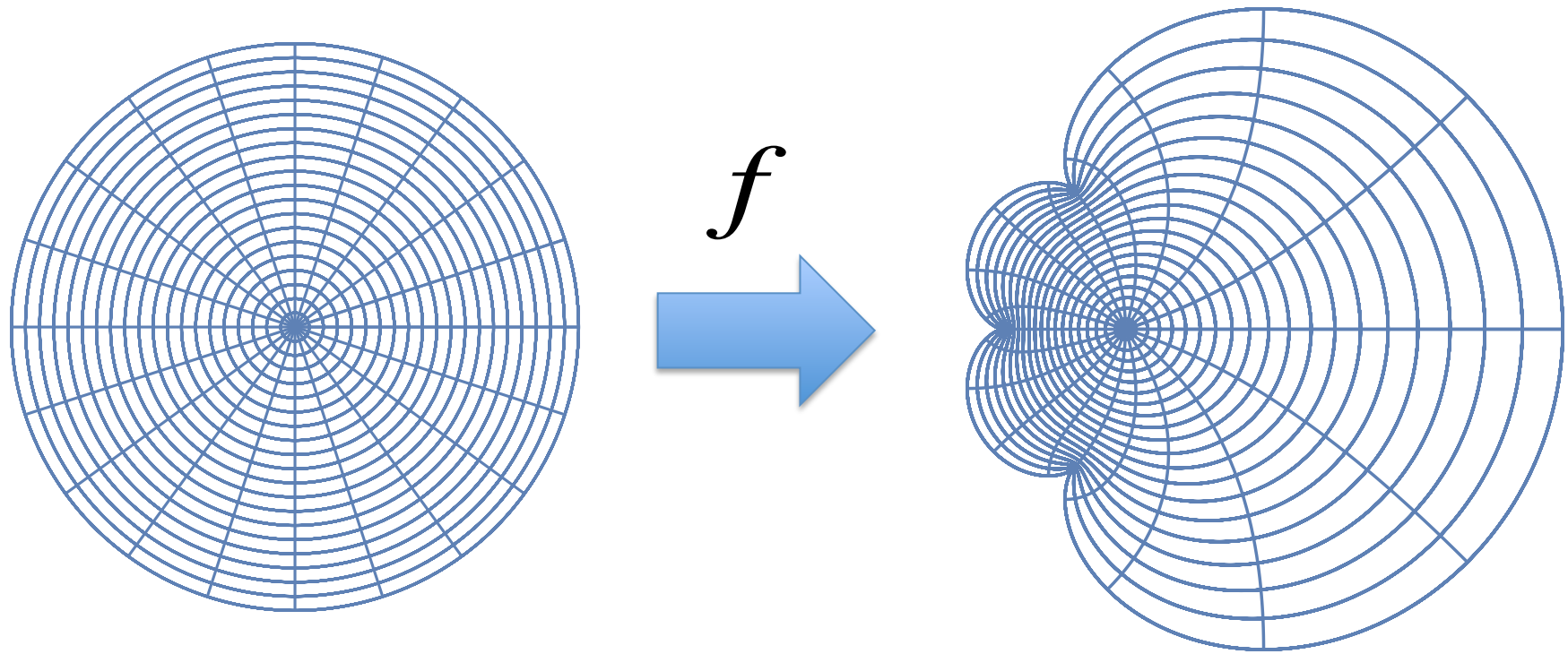
等角写像



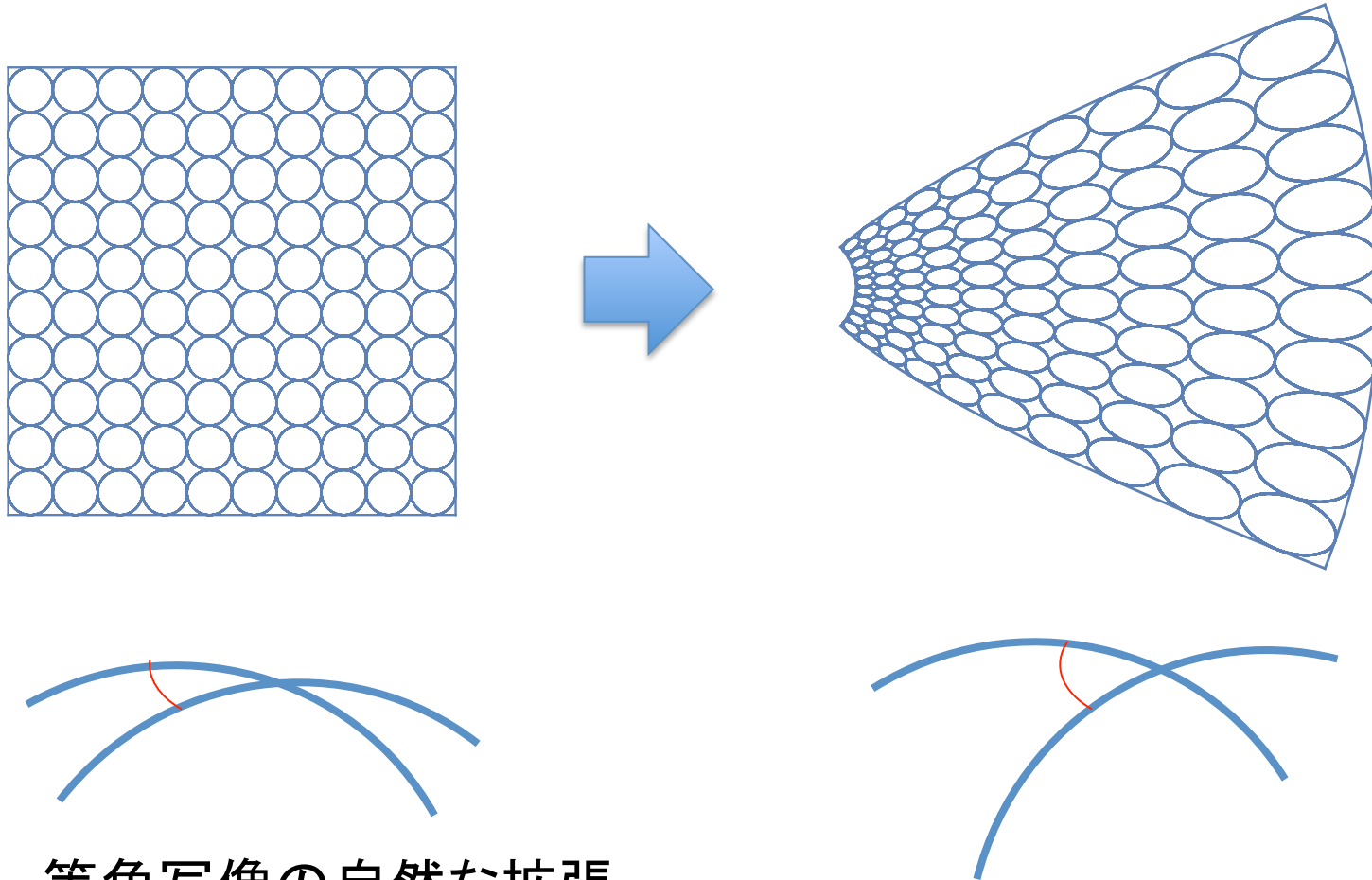
- ▶ 等角写像は局所的には平行移動・拡大縮小・回転の合成
- ▶ 局所的には円が円に近いものに移る

数値数値等角写像

二つの領域間の等角写像を数値的に構成



擬等角写像

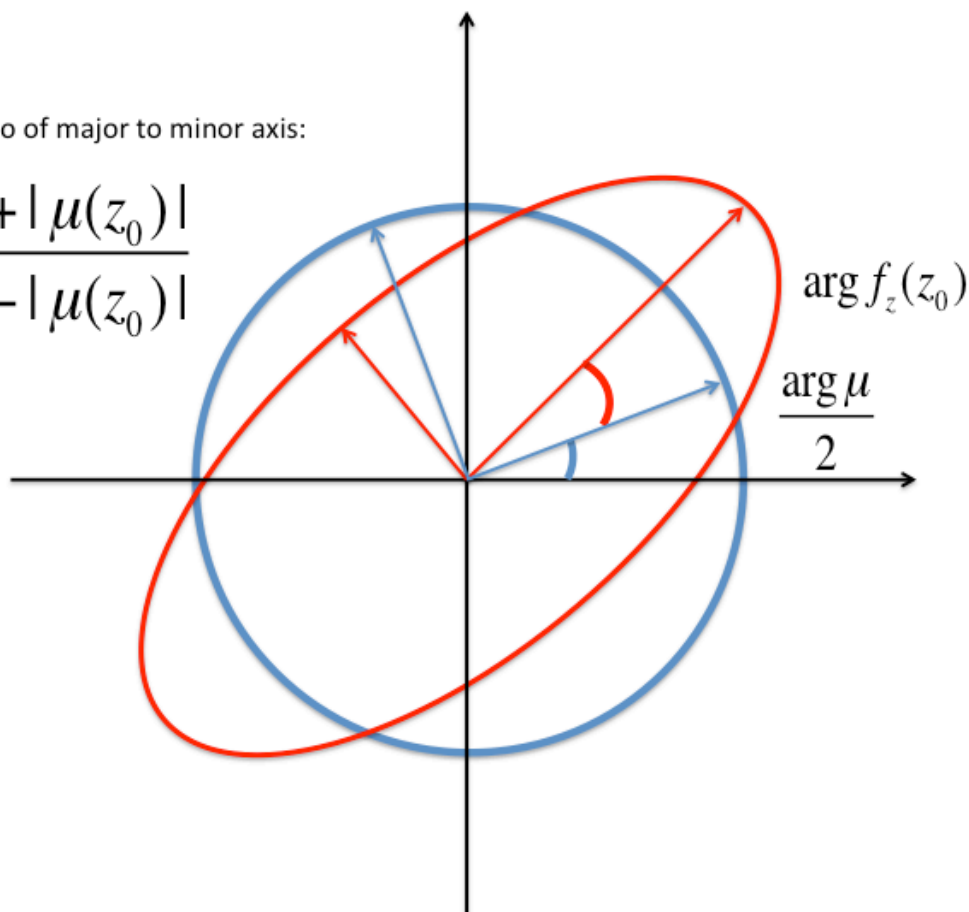


- ▶ 等角写像の自然な拡張
- ▶ 局所的には円を楕円に近いものに移す(ほとんど至るところで)
- ▶ 角度の変化を「ある程度」許容するより広いクラス

ベルトラミ係数

The ratio of major to minor axis:

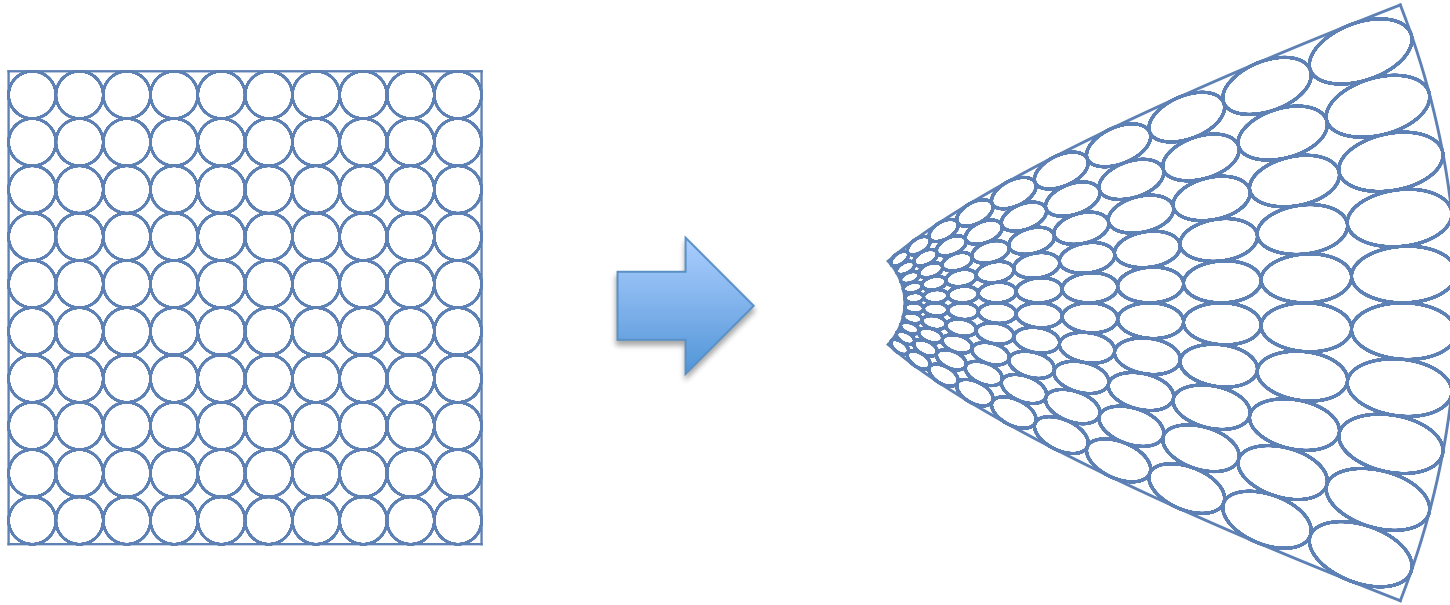
$$\frac{1+|\mu(z_0)|}{1-|\mu(z_0)|}$$



$$\mu(z) := \frac{f_{\bar{z}}(z)}{f_z(z)}$$

μ が定義域上a.e.で意味を持ち、小円の変形はこれに依存

数値擬等角写像



- 定義域上の各点での「円の歪み具合」を指定すると対応する擬等角写像が存在（可測型リーマンの写像定理）
- 解は正規化条件の下で一意的
- その近似解を求める手法が数値擬等角写像

先行研究

- 偏微分方程式の数値解析の一般論を応用した方法
- Ahlfors-Bersの証明を応用した特異積分作用とノイマン級数を用いる方法
- 円充填を用いる方法

問題点

収束
性

誤差
評価

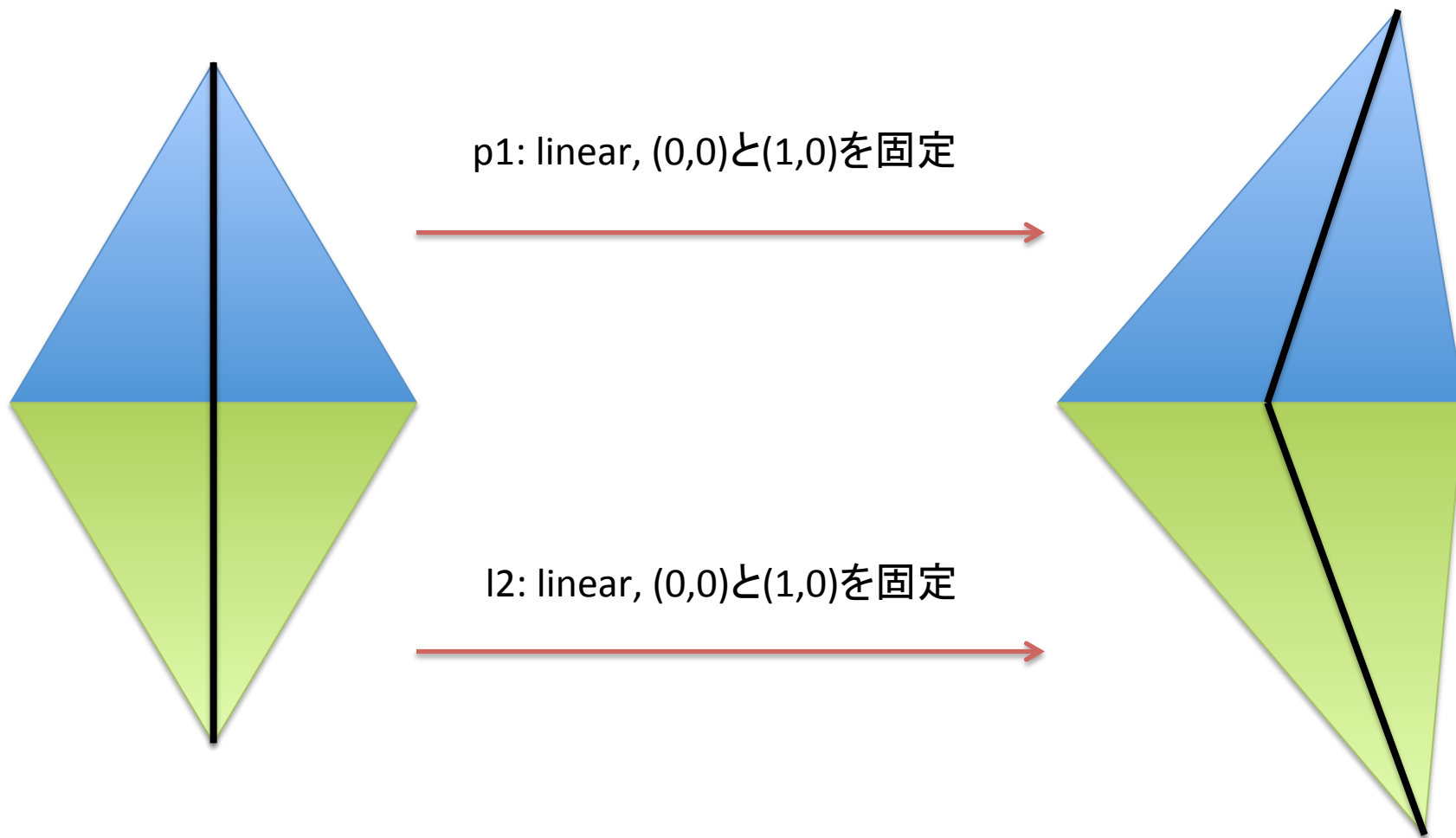
計算
量

博士後期課程での目標

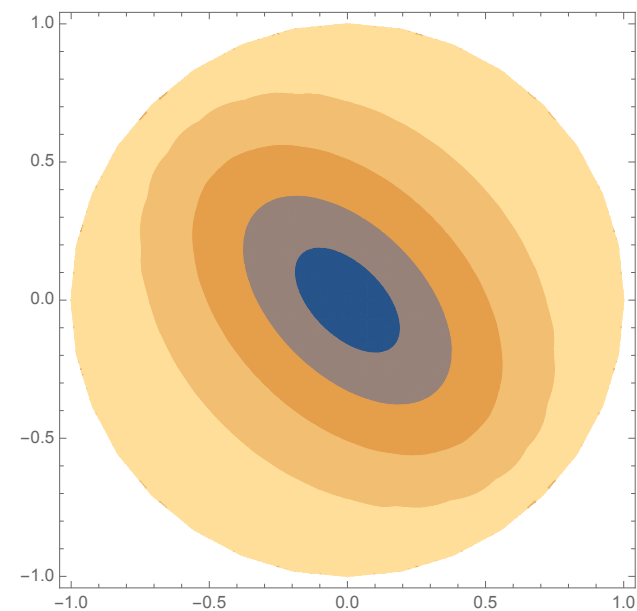
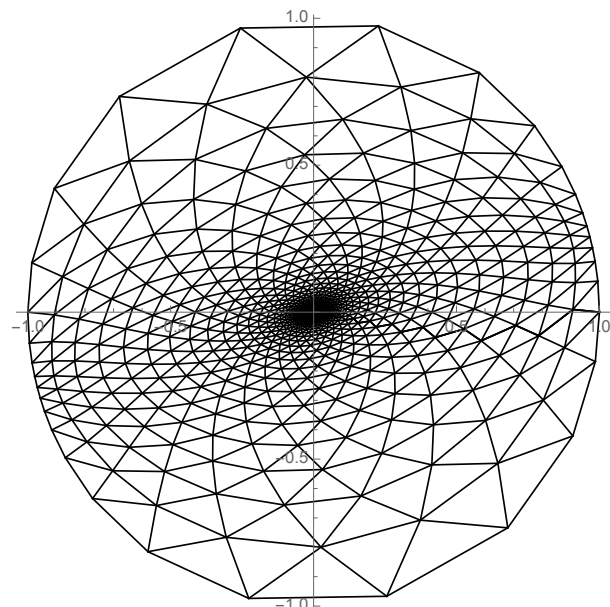
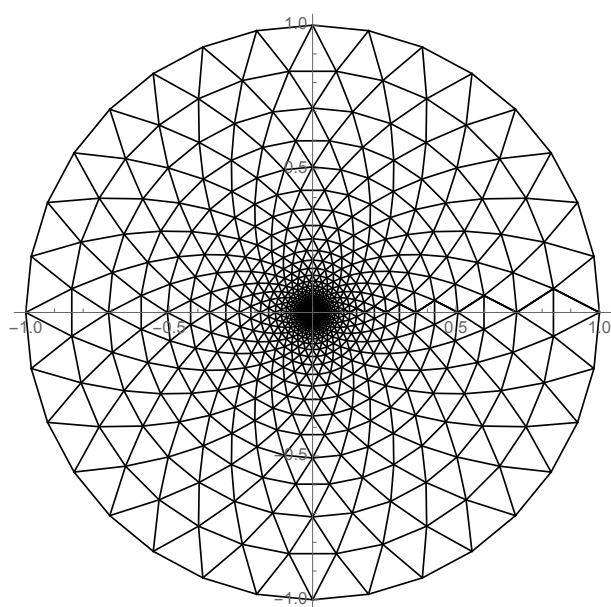
汎用的に用いることができる
収束性が保証された
新しい数値擬等角写像法の確立

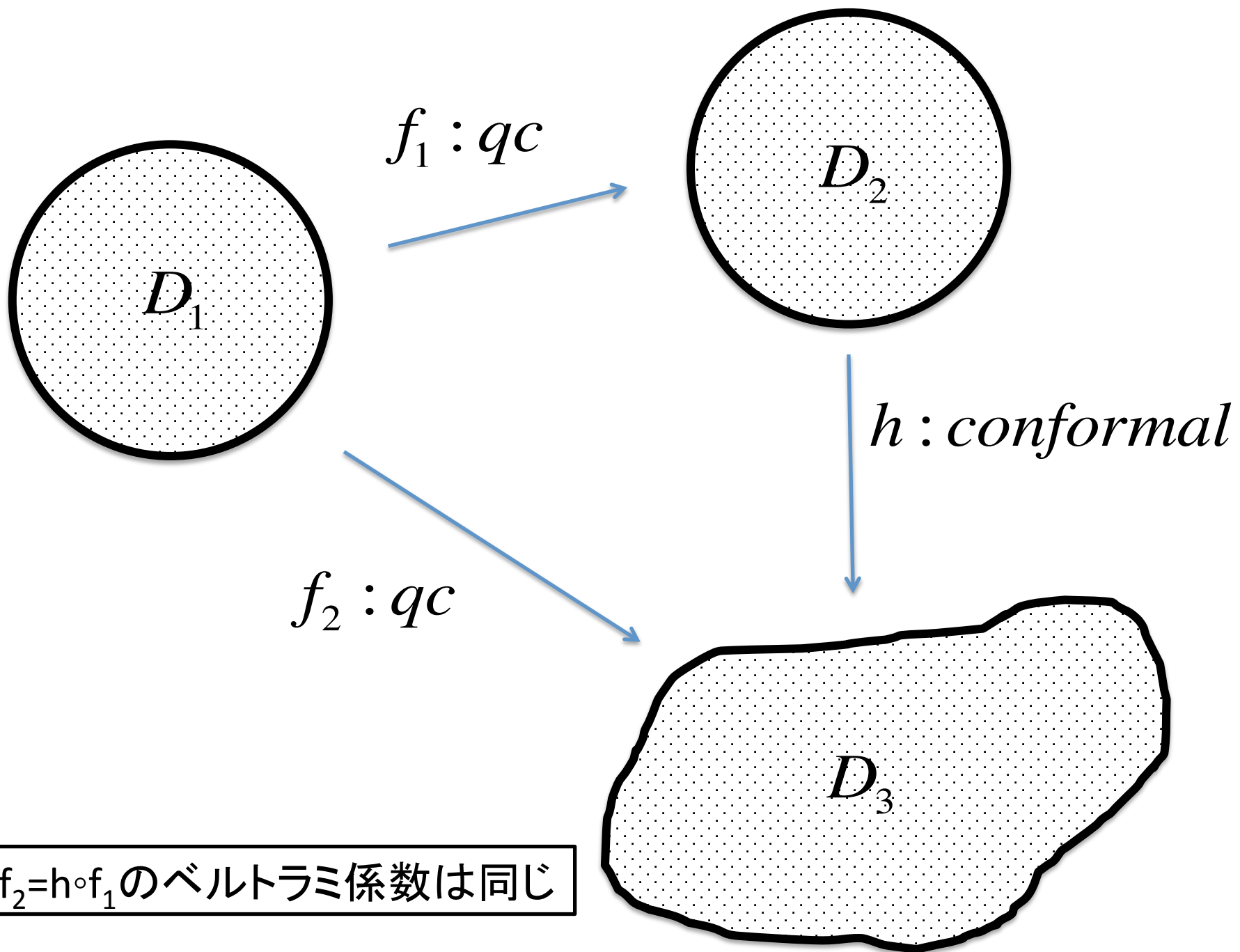
アルゴリズムと主定理

区分線形写像 (PL写像)



区分線形写像 (PL写像)





f_1 と $f_2=h \circ f_1$ のベルトラミ係数は同じ

目指したアルゴリズム

シンプルに単位円板間のPL写像を構成

- 入力: ベルトラミ係数(楕円の歪み)
単位円板の三角形分割
- 出力: 単位円板間の擬等角写像を近似する
区分線形写像

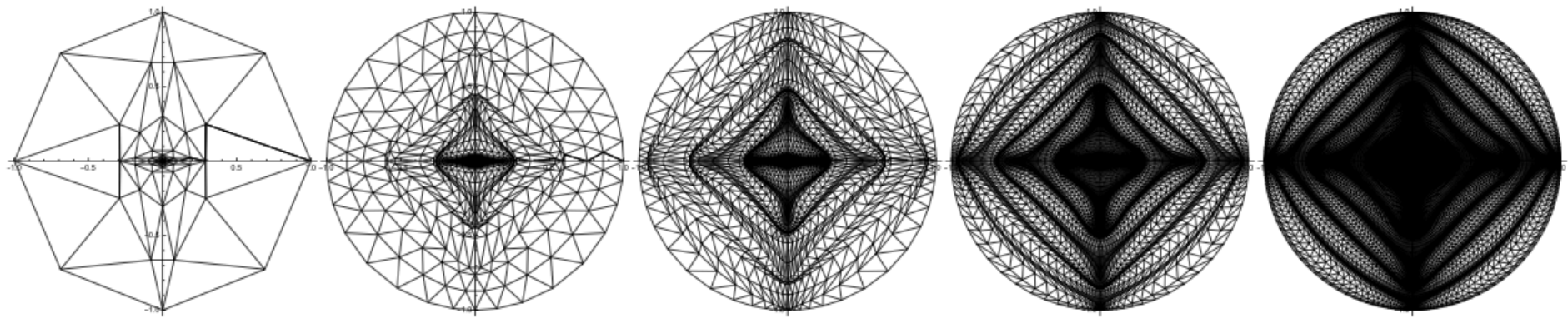
アルゴリズムと主定理

- 時間に余裕があれば
アルゴリズムの別スライドへ

(実際の発表では時間の都合によりアルゴリズムは紹介できませんでした)

主結果

特定の場合には収束性が
保証された新しいアルゴリズムを提案
(R. Michael Porter氏との共同研究)



特徴

- 既存の枠組みにとらわれない、擬等角写像に特有の性質に焦点を当てた新しいアプローチ
- ベルトラミ係数にある程度のレギュラリティーを仮定すれば、分割を細かくしていくとき真の解に近づく
- 計算量は他の手法とそう大きな差はない

課題

- ベルトラミ係数の制限はどこまで緩められるか？
- 真の解と近似解の誤差を評価できるか？
- どれくらい細かい分割を指定すれば良いか事前に評価できるか？

まとめ

新しい擬等角写像の離散化手法を確立し
社会への還元を目指す

特定の条件の下では収束性が保証された
新しい数値擬等角写像法を確立

今後は現状の課題を克服しつつ
確立した手法を他分野へ展開していきたい

ご清聴ありがとうございました

島内 宏和
東北大学大学院 情報科学研究科
情報基礎科学専攻 博士後期課程3年